

竖直平板 Blasius 流层流边界层流动与 传热耦合解

赵国昌^{1,3}, 单 龙¹, 宋丽萍², 杜 霞¹, 孔敬儒¹, 赵 恒¹

(1. 沈阳航空航天大学 航空航天工程学部(院), 沈阳 110136;

2. 沈阳航空航天大学 高等教育研究所, 沈阳 110136;

3. 沈阳航空航天大学 航空航天工程学部(院)

辽宁省航空推进系统先进测试技术重点实验室, 沈阳 110136)

摘 要: 对考虑辐射传热、流体黏度随温度变化、有和无滑移边界条件下的可渗透竖直平板 Blasius 流层流边界层的无量纲速度场与温度场进行了深入研究. 经相似变换将描述速度场与温度场耦合的偏微分方程组转换成非线性常微分方程组, 用 Runge-Kutta 法对常微分方程组进行了数值求解. 研究了无量纲参数对无量纲速度场及温度场的影响, 着重分析了滑移边界条件下速度和温度随无量纲参数的变化规律. 结果表明: 吸入时边界层变薄, 喷注时边界层加厚; 对比于无滑移边界条件, 滑移边界条件下速度、温度边界层变薄; 随着变黏度参数 α 或喷注与吸入参数的增大, 壁面摩擦因数、局部努塞尔数 Nu 增大, 速度和温度边界层变薄; 随着普朗特数 Pr 、热辐射参数 R 的增加, 或毕渥数 Bi 、布林克曼数 Br 的减小, 温度边界层变薄.

关 键 词: Blasius 流; 层流边界层; 流动与传热; 热辐射; 滑移边界; 可渗透壁面; 变黏度

中图分类号: V231; TG156.99

文献标志码: A

Coupling solutions of flow and heat transfer in the Blasius laminar boundary layer flow over a vertical flat plate

ZHAO Guo-chang^{1,3}, SHAN Long¹, SONG Li-ping²,

DU Xia¹, KONG Jing-ru¹, ZHAO Heng¹

(1. Faculty of Aerospace Engineering,

Shenyang Aerospace University, Shenyang 110136, China;

2. Institute of Higher Education,

Shenyang Aerospace University, Shenyang 110136, China;

3. Liaoning Key Laboratory of Advanced Measurement and Test Technology

for Aviation Propulsion System, Faculty of Aerospace Engineering,

Shenyang Aerospace University, Shenyang 110136, China)

Abstract: The combined effects of thermal radiation, temperature dependent viscosity, slip and no-slip boundary conditions over a permeable vertical flat plate on the dimensionless velocity and temperature fields of Blasius laminar boundary layer flow were deeply investigated. By taking similarity variables, the coupled partial differential equations describing the velocity and temperature fields were transformed into nonlinear ordinary differential equations, and then solved numerically using the Runge-Kutta method. The effects of dimensionless parameters on the velocity and temperature fields were investigated with a focus on the analysis of velocity and temperature profiles, with the dimensionless parameters varying

under the slip boundary condition. The results indicate that the existence of suction will make the boundary layer thinner, and the boundary layer will be thicker in the case of injection. In contrast with no-slip boundary conditions, the boundary layers of velocity and temperature are all thinner at wall slip boundary conditions. Increasing either the variable viscosity parameter α or the injection and suction parameter will increase the local skin friction coefficient and the local Nusselt number Nu while reducing the velocity and temperature boundary layers thickness. Furthermore, the temperature boundary layer thickness will decrease as the Biot number Bi , Brinkmann number Br decrease or as the Prandtl number Pr and thermal radiation parameter R increase.

Key words: Blasius flow; laminar boundary layer; flow and heat transfer; thermal radiation; slip boundary; permeable flat plate; variable viscosity

符号表

u, v	x, y 方向的速度 (m/s)	$\theta(\eta)$	无量纲温度
u_∞	主流速度 (m/s)	$V_w(x)$	壁面渗透速度 (m/s)
k_0	$k_0 = \frac{3R}{3R+4}$	Gr	Grashof 数
l	平均自由程 (m)	f_w	喷注与吸入参数
T_l	左侧热流体温度 (K)	Br	Brinkmann 数
T_∞	右侧冷流体温度 (K)	q_r	辐射传热热流密度 (W/m^2)
σ	界面切向动量调节系数	α	变黏度参数
λ	导热系数 ($W/(m^2 \cdot K)$)	σ^*	Stefen-Boltzmann 辐射常数 ($W/(m^2 \cdot K^4)$)
h	表面传热系数 ($W/(m^2 \cdot K)$)	k^*	平均吸收比
T	流体温度 (K)	Pr	Prandtl 数
β	体膨胀系数	c_p	比定压热容 ($J/(kg \cdot K)$)
Ψ	流函数	Bi	Biot 数
μ	流体动力黏度 ($Pa \cdot s$)	ρ	密度 (kg/m^3)
η	相似参数	K	滑移参数
μ_∞	边界层外流体动力黏度 ($Pa \cdot s$)	R	热辐射参数
ν_∞	边界层外流体运动黏度 (m^2/s)	Re	Reynolds 数
$f(\eta)$	无量纲流函数	Bi	Biot 数

不可压黏性流体流经一半无限大平板形成的二维稳定流叫 Blasius 流^[1]. Blasius 用相似变换将描述 Blasius 流的偏微分方程转换为常微分方程——Blasius 方程, 推动了 Blasius 流的研究. Blasius 流在机械、热能及航空航天工程等领域较为常见, 如核电力设备、燃气涡轮机、航空和太空运输工具的推进器等设备中的边界层流动与传热多为 Blasius 流. 由于 Blasius 流是复杂流动的基础, 在实际工程应用中具有重要意义, 所以不断吸引众多研究者对其进行更深入的研究, 如从常物性到变物性、从静止平板到平板与流体有相对运动、从无喷注与吸入到考虑喷注与吸入、从单纯研究边界层内速度分布到综合考虑速度与温度的相互影响、从忽略辐射传热考虑到辐射传热研究等. 随着研究者对微尺度流动与传热研究的不断深

入, 发现在微/纳机电系统和微流体系统、多孔介质、金属轧制、聚合物挤压成型、悬浮液流动、薄膜流体润滑以及生物学等微小尺度的流动中, 液体边界滑移对系统的性能产生重要影响^[2]; 航空推进装置、航电冷却系统、滑油系统中的微流体流动的边界滑移也需要给予考虑. Wang^[3]研究了具有延伸表面的滑移驻点流、滑移参数对驻点流的影响; Aman 等^[4]研究了有滑移的竖直平板壁面黏性不可压缩流体边界层内的流动与传热. 也有研究者将 Blasius 流的研究方法拓展到自然对流、强迫对流、多孔介质等领域, 如 Singh 等^[5]研究了温度沿半无限大竖直壁面变化的不可压流体的自然对流; Nadeem 等^[6]研究了水平多孔平板上流体黏度随温度变化的 Blasius 流; Merkin 等^[7]求解了平板强迫对流换热边界层的数值解. 有的研究

者对移动的半无限大平板与主流静止流体间形成的边界层流动问题^[8-13]即与 Blasius 流类似的 Sakiadis 流进行了研究. 还有一些研究者^[14-15]将化学反应、磁场等因素考虑到边界层的数值计算中. 近年来有关 Blasius 流的研究主要集中 Blasius 流在可渗透壁面有热辐射传热、有滑移边界条件下的流动等^[16-25]. 在前人研究的基础上, 本文综合考虑流体黏度随温度变化、辐射传热、喷注与吸入以及滑移边界条件等因素的影响, 使求解的边界层内的流动及温度分布情况更加接近真实情况, 特别是着重对有、无滑移边界条件下 Blasius 流层流边界层无量纲速度与温度分布随以上因素的变化规律进行了深入研究.

1 数学物理模型

1.1 偏微分方程组及边界条件

图 1 为重力场中流体在竖直平板壁面的 Blasius 流示意图, 冷流体以均匀速度 u_∞ 流过半无限大竖直平板, 平板左侧表面与温度为 T_f 的热流体接触, 右侧表面与温度为 T_∞ 的冷流体接触. Blasius 流的连续、动量及能量方程, 黏度及辐射传热关系式等由式(1)~式(6)表达.

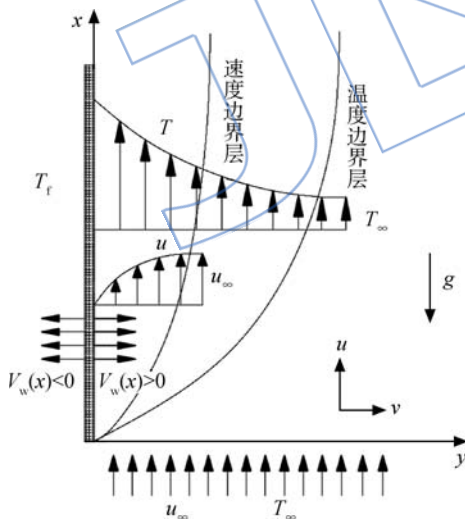


图 1 Blasius 流示意图

Fig. 1 Schematic diagram of Blasius flow

连续方程

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

动量方程

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + g\beta(T - T_\infty) \quad (2)$$

能量方程

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\lambda}{\rho c_p} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \frac{1}{\rho c_p} \cdot \frac{\partial q_r}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho c_p} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (3)$$

设流体动力黏度 μ 为流体温度 T 的反线性函数^[26]

$$\mu(T) = \frac{\mu_\infty}{1 + \gamma(T - T_\infty)} \quad (4)$$

其中 γ 为物性常数. 式(3)中辐射传热的热流密度 q_r 可简化为^[27]

$$q_r = -\frac{4\sigma^*}{3k^*} \cdot \frac{\partial T^4}{\partial y} \quad (5)$$

式中 $\sigma^* = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4)$ 为 Stefan-Boltzmann 辐射常数; k^* 为平均吸收比. 为了简化计算式(5)中的 $\partial T^4/\partial y$, 假设温度边界层内 T^4 可在 T_∞ 温度点上用式(6)所示的 Taylor 公式线性展开^[12,23]

$$T^4 \approx 4T_\infty^3 T - 3T_\infty^4 \quad (6)$$

由式(5)和式(6)可得

$$\frac{\partial q_r}{\partial y} = -\frac{16\sigma^* T_\infty^3}{3k^*} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (7)$$

将式(7)代入式(3), 则有

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \left[\alpha + \frac{16\sigma^* T_\infty^3}{3\rho c_p k^*} \right] \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\mu}{\rho c_p} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (8)$$

式中 $\alpha = \lambda/(\rho c_p)$ 为热扩散率, 整理式(8)得

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\alpha}{k_0} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\mu}{\rho c_p} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (9)$$

其中 $k_0 = \frac{3R}{3R+4}$, $R = \lambda k^*/(4\sigma^* T_\infty^3)$ 为热辐射参数. 当冷流体温度越高, 导热系数越小, 平均吸收比越小时, R 越小, 此时应考虑辐射传热对边界层速度和温度分布的影响, 航空推进系统中应考虑辐射传热的影响; 当 $k_0 \rightarrow 1$ ($R \rightarrow \infty$) 时, 则不必考虑辐射传热的影响.

发汗冷却、脉动膜片及同位素分离等常见的外掠平壁层流流动的壁面是需要考虑吸入或喷注的可渗透壁面. 流体通过渗透壁面的速度由式(10)表示^[28]

$$V_w(x) = -\frac{f_w}{2} \cdot \sqrt{\frac{u_\infty \nu_\infty}{x}} \quad (10)$$

其中 $\nu_\infty = \mu_\infty/\rho$, 喷注与吸入参数 f_w 为常数. 吸入时, $V_w(x) < 0$; 喷注时, $V_w(x) > 0$; $f_w = 0$ 时为不可渗透的壁面.

可渗透壁面速度边界和温度边界条件分别表述如下. 速度边界条件为

$$u(x, 0) = \frac{(2-\sigma)l}{\sigma} \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} \quad (11)$$

$$v(x, 0) = V_w(x) \quad (12)$$

$$u(x, \infty) = u_\infty \quad (13)$$

式(11)为速度滑移边界条件,其中 σ 为界面切向动量调节系数; l 为平均自由程;在实际应用中常假定固体表面粗糙, σ 近似取1.式(12)为可渗透壁面边界条件;式(13)为主流速度边界条件.温度边界条件为

$$-\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{(x,0)} = h[T_f - T(x, 0)] \quad (14)$$

$$T(x, \infty) = T_\infty \quad (15)$$

式(14)为可渗透壁面处的温度边界条件,为了简化分析,根据边界层对流换热的研究结论,假设 $h = cx^{-1/2}$,其中 c 为常数^[11,20];式(15)为主流温度边界条件.

1.2 相似变换及常微分方程组

为便于求解偏微分方程组式(1)~式(3),且使求解结果具有通用性,通过相似变换将偏微分方程组化为常微分方程形式,为此定义流函数 Ψ

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (16)$$

假定流函数为式(17)

$$\Psi = g(x)f(\eta) \quad (17)$$

$g(x) = \sqrt{u_\infty \nu_\infty x}$

$f(\eta)$ 为无量纲流函数,相似变量 η 为

$$\eta = y \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu_\infty x}} \quad (18)$$

经推导得出速度关系式

$$u = u_\infty f'(\eta) \quad (19)$$

$$v = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{u_\infty \nu_\infty}{x}} [f'(\eta) - f(\eta)] \quad (20)$$

无量纲温度定义为

$$\theta(\eta) = \frac{T - T_\infty}{T_f - T_\infty} \quad (21)$$

由式(21)可知 $\theta(\eta) < 1$.利用以上相似变量及无量纲温度表达式将式(2)~式(3)变换为3阶常微分方程组

$$f''' + \frac{1}{2}(1 + a\theta)ff'' - \frac{a}{1 + a\theta}\theta'f'' + Gr\theta(1 + a\theta) = 0 \quad (22)$$

$$\theta'' + \frac{1}{2}Prk_0 f\theta' + \frac{Brk_0}{1 + a\theta}(f'')^2 = 0 \quad (23)$$

式(22)和式(23)中的无量纲参数 Gr , Pr , Br , a 表达式分别为

$$Gr = \frac{g\beta(T_f - T_\infty)x}{u_\infty^2}$$

假设 $\beta(T_f - T_\infty)x = m$,在 m 为常数时 Gr 为定值^[29].

$$Pr = \frac{\mu_\infty c_p}{\lambda}$$

$$Br = \frac{\mu_\infty u_\infty^2}{\lambda(T_f - T_\infty)}$$

变黏度参数

$$a = \gamma(T_f - T_\infty) \quad (24)$$

当 $\gamma = 0$ 时, $a = 0$,此时黏度为常数,即 $\mu(T) = \mu_\infty$;当 $\gamma \neq 0$ 时, $a \neq 0$,黏度随温度按式(4)的反线性函数变化,因此相似变换后的常微分方程式(22)和式(23)包含了黏度为常数和黏度随温度变化时的情况.对边界条件式(11)~式(13)和式(14)~式(15)进行相似变换得

$$f(0) = f_w, \quad f'(\infty) = 1 \quad (25)$$

$$f'(0) = \frac{2-\sigma}{\sigma} K_n Re^{1/2} f''(0) = K f''(0) \quad (26)$$

$$\theta'(0) = -Bi[1 - \theta(0)], \quad \theta(\infty) = 0 \quad (27)$$

式(26)中, $K_n = l/x$, $Re = u_\infty x / \nu_\infty$, 滑移参数

$$K = \frac{2-\sigma}{\sigma} K_n Re^{1/2} \quad (28)$$

$$Bi = \frac{\delta h}{\lambda} = \frac{h}{\lambda} \cdot \sqrt{\frac{\nu_\infty x}{u_\infty}} \quad (29)$$

由 $h = cx^{-1/2}$ 将 Bi 转化为

$$Bi = \frac{h}{\lambda} \cdot \sqrt{\frac{\nu_\infty x}{u_\infty}} = \frac{c}{\lambda} \cdot \sqrt{\frac{\nu_\infty}{u_\infty}} \quad (30)$$

2 方程组求解及结果分析

在Blasius流研究中Bataller^[12]考虑了辐射传热;Aziz^[10]使用了对流换热边界条件;Makinde^[21]考虑了无滑移边界条件下可渗透边界等.本文综合考虑流体黏度随温度变化、辐射传热、喷注与吸入以及滑移边界条件等因素,系统研究了有、无滑移边界条件下辐射换热、变黏度、可渗透边界及对流换热边界条件对Blasius流的影响,使求解的边界层内的流动及温度分布更加接近真实情况.为了验证本文计算模型和程序的正确性,将所开发的计算模型予以简化,使其数值计算条件设定为与Bataller, Makinde以及Aziz的计算条件相一致的计算参数,对模型的计算结果进行检验.当 f_w, a, Br 都为0时,与Bataller和Makinde的无量纲温度 $\theta(0)$ 计算结果对比见表1.为了与Aziz和Makinde的计算结果进行对比,在 f_w, a, Br 都为0条件下,取 $k_0 = 1, Pr = 0.72, -\theta'(0)$ 计算结果比较如表2所示.表1和表2的计算结果证实了所用计算模型和程序的正确性.

表 1 本文结果与 Bataller 和 Makinde 的计算结果比较

Table 1 This paper's result compared with Bataller's and Makinde's results

Bi	Pr	R	$\theta(0)$		
			Bataller	Makinde	本文结果
0.1	5.0	0.7	0.1996265	0.19957406	0.19957417
0.5	5.0	0.7	0.5548979	0.55489763	0.55489775
1.0	5.0	0.7	0.7137422	0.71374169	0.71374178
1.0	0.72	0.7	0.8334487	0.83312107	0.83312071
1.0	1.0	0.7	0.8156143	0.81555469	0.81555461
1.0	10	0.7	0.6630187	0.66301284	0.66301291
5.0	5.0	0.7	0.9257453	0.92574298	0.92574301
5.0	5.0	5.0	0.9037694	0.90376783	0.90376786

表 2 本文结果与 Aziz 和 Makinde 的计算结果比较

Table 2 This paper's result compared with Aziz's and Makinde's results

Bi	$\theta(0)$			$-\theta'(0)$		
	Aziz	Makinde	本文结果	Aziz	Makinde	本文结果
0.05	0.1447	0.1446	0.14466119	0.0428	0.0476	0.04276694
0.60	0.6699	0.66991	0.66991560	0.1981	0.19805	0.19805064
1.00	0.7718	0.77182	0.77182218	0.2282	0.22817	0.22817782
5.00	0.9441	0.94417	0.94417380	0.2791	0.27913	0.27913100
20.00	0.9854	0.98543	0.98543356	0.2913	0.29132	0.29132880

计算模型和程序得到验证之后, 本文对 f_w , a , Br 不为 0, 以及 k_0 , Pr , Bi , R , Gr 取不同数值时的 Blasius 流进行更深入的研究, 结果如图 2 至图 12 所示. Blasius 流研究中的无量纲参数一般在 $0.72 \leq Pr \leq 100$, $0.5 \leq Bi \leq 20$, $0.1 \leq Br \leq 10$, $-0.5 \leq a \leq 1$, $0.7 \leq R \leq 100^{[21]}$ 范围内. 为了研究单一参数对 Blasius 流流动和传热的影响, 本文在改变某单一参数计算时其他参数保持不变, 不变的参数取为: $a = 0.1$, $Pr = 0.72$, $f_w = 0.1$, $R = 0.7$, $Br = 0.1$, $Bi = 0.1$, $Gr = 0.01$.

使用 Matlab 软件用 Runge-Kutta 法求解耦合的 3 阶常微分方程式(22)和式(23), 须给定 $\eta = 0$ 处的边界条件, 为此假定壁面处的 $f''(0)$ 以及 $\theta(0)$ 的初值, 通过迭代计算寻找满足 $f'(\infty) \rightarrow 1$, $\theta(\infty) \rightarrow 0$ 和 $\theta'(\infty) \rightarrow 0$ 条件的 $f''(0)$ 和 $\theta(0)$, 迭代计算收敛精度取为 10^{-7} .

2.1 无量纲参数对速度边界层的影响

图 2~图 4 给出了壁面在有滑移($K=0.5$)及无滑移($K=0$)情况下, 变黏度参数 a 、喷注与吸

入参数 f_w 以及 Br 对无量纲速度 $f'(\eta)$ 的影响曲线图. 随着相似参数 η 的增大, 无量纲流函数的 1 阶导数 $f'(\eta)$ 逐渐增大到 1, u 趋于 u_∞ ($f'(\eta) = u/u_\infty$). 当边界层流体速度达到 99% 主流速度处的 y 方向距离为流动边界层的厚度, $f'(\eta)$ 趋于 1 所对应的 η 越小边界层越薄. 有、无滑移情况时无量纲参数 a 对流体边界层内速度分布的影响如图 2 所示. 随着 a 的增大, $f'(\eta)$ 增大, 速度边界层变薄. 图 3 为有、无滑移情况时喷注与吸入参数 f_w 对流体边界层内速度分布的影响. 当 $f_w < 0$ 逐渐变化到 $f_w > 0$ 时, 即壁面由喷注变化到吸入时, 随着 f_w 的增大, $f'(\eta)$ 增大, 速度边界层厚度变薄. 图 4 为有、无滑移情况时 Br 对流体边界层内速度分布的影响. 可以看出随着 Br 的增大, $f'(\eta)$ 增大, 速度边界层变薄; Br 增大, 黏度耗散产热量与换热量比值增加, 边界层内流体的温度升高、黏性下降, 速度边界层变薄. 由图 2~图 4 可知, 与 a 及 f_w 对无量纲速度的影响相比较, Br 对无量纲速度的影响较小. 无量纲参数 a , f_w , Br 对无量纲

速度曲线的影响类似,在滑移边界条件下,紧贴壁面的流体速度不为0,与无滑移时相比较, $f'(\eta)$ 更大, u 更大.在相同无量纲参数条件下,无滑移的边界层厚度大于有滑移的边界层厚度.

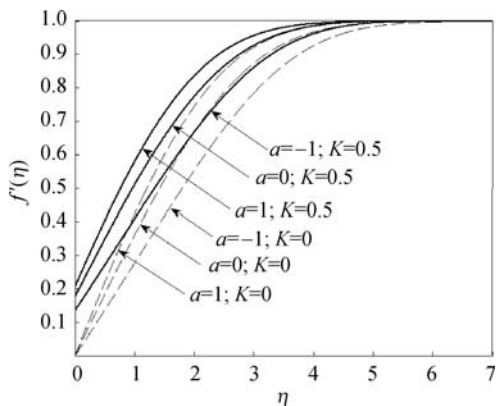


图2 有、无滑移边界条件下 a 对 $f'(\eta)$ 的影响

Fig. 2 Effects of a on $f'(\eta)$ under slip and no-slip boundary conditions

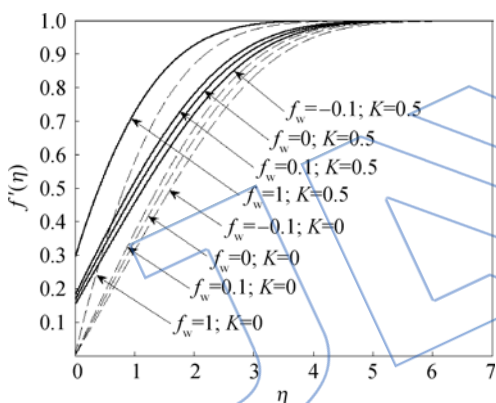


图3 有、无滑移边界条件下 f_w 对 $f'(\eta)$ 的影响

Fig. 3 Effects of f_w on $f'(\eta)$ under slip and no-slip boundary conditions

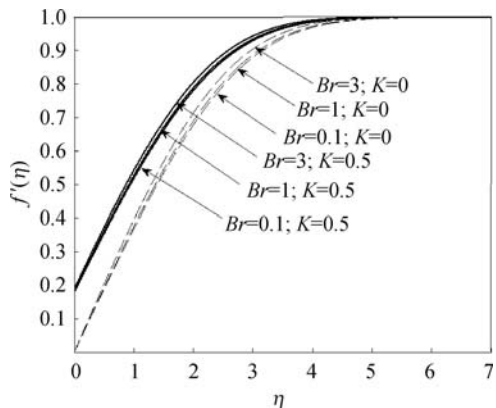


图4 有、无滑移边界条件下 Br 对 $f'(\eta)$ 的影响

Fig. 4 Effects of Br on $f'(\eta)$ under slip and no-slip boundary conditions

2.2 无量纲参数对温度边界层的影响

图5~图10给出了无量纲参数对边界层内无量纲温度 $\theta(\eta)$ 分布的影响.在壁面处流体温度最高,随 η 增加逐步下降到主流温度.对比图2~图4所示无量纲速度和图5~图10所示无量纲温度,无量纲参数对温度的影响较大,且温度边界层较厚.图5给出了有、无滑移情况下变黏度参数 a 对边界层温度分布的影响.随着 a 的增大,壁面及边界层内 $\theta(\eta)$ 减小,热边界层厚度变薄.图6给出了有、无滑移情况时 f_w 对流体边界层内温度分布的影响.当 $f_w < 0$ 逐渐变化到 $f_w > 0$,即由壁面喷注逐渐变化到壁面吸入时,壁面及边界层内无量纲温度 $\theta(\eta)$ 减小,温度边界层变薄.图7给出了有、无滑移情况时无量纲参数 Pr 对流体边界层内温度分布的影响.随着 Pr 的增加, $\theta(\eta)$ 减小,壁面温度 $\theta(0)$ 降低,温度边界层变薄, Pr

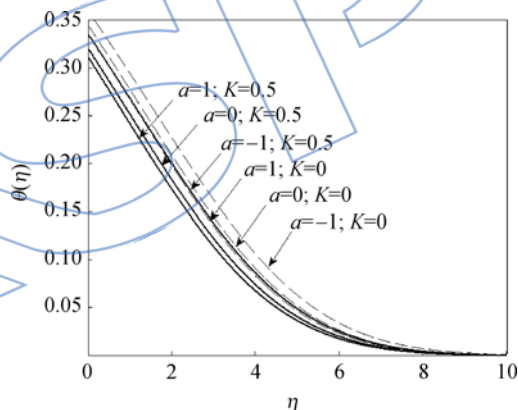


图5 有、无滑移边界条件下 a 对 $\theta(\eta)$ 的影响

Fig. 5 Effects of a on $\theta(\eta)$ under slip and no-slip boundary conditions

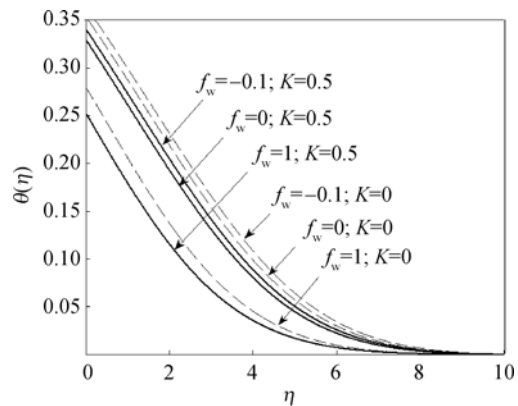


图6 有、无滑移边界条件下 f_w 对 $\theta(\eta)$ 的影响

Fig. 6 Effects of f_w on $\theta(\eta)$ under slip and no-slip boundary conditions

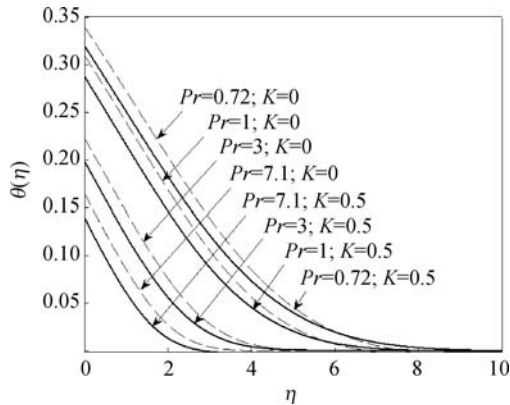


图7 有、无滑移边界条件下 Pr 对 $\theta(\eta)$ 的影响
Fig. 7 Effects of Pr on $\theta(\eta)$ under slip and no-slip boundary conditions

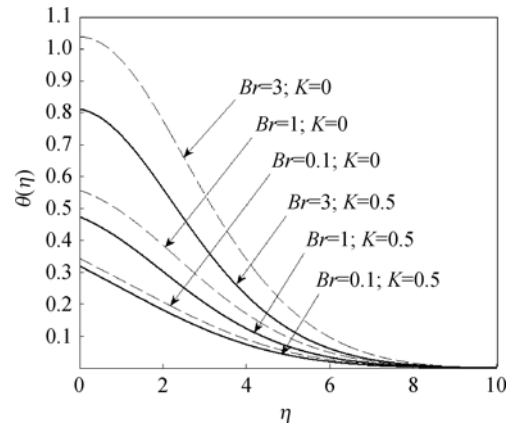


图10 有、无滑移边界条件下 Br 对 $\theta(\eta)$ 的影响
Fig. 10 Effects of Br on $\theta(\eta)$ under slip and no-slip boundary conditions

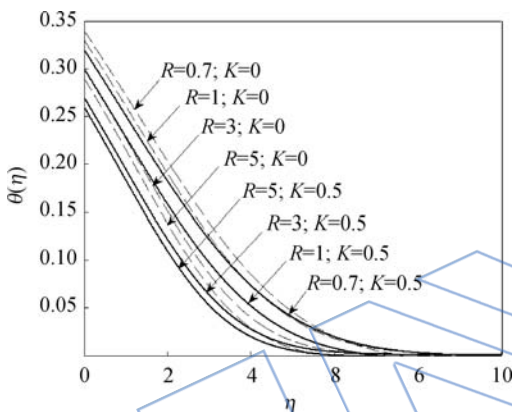


图8 有、无滑移边界条件下 R 对 $\theta(\eta)$ 的影响
Fig. 8 Effects of R on $\theta(\eta)$ under slip and no-slip boundary conditions

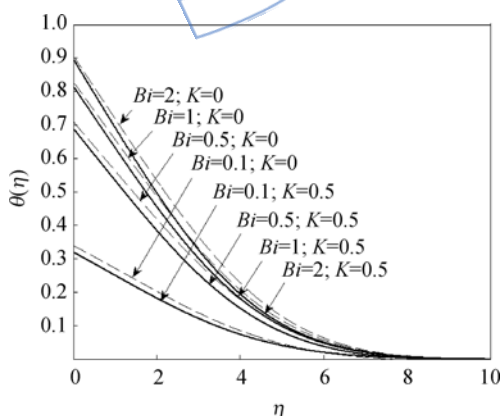


图9 有、无滑移边界条件下 Bi 对 $\theta(\eta)$ 的影响
Fig. 9 Effects of Bi on $\theta(\eta)$ under slip and no-slip boundary conditions

对温度分布的影响较大. 图8为有、无滑移边界条件下热辐射参数 R 对流体边界层内温度分布的影响. 随着 R 增加, 边界层内 $\theta(\eta)$ 减小, 热边界层

减薄. 图9为有、无滑移情况下 Bi 对流体边界层内温度分布的影响. 由图9可知, 随着 Bi 的增大, 边界层内温度 $\theta(\eta)$ 升高, 热边界层厚度增大. 图10为有、无滑移情况时 Br 对边界层内温度 $\theta(\eta)$ 的影响. 随着 Br 的增加, $\theta(\eta)$ 增大, 热边界层变厚.

由图5~图10可知, 滑移边界条件与无滑移边界条件下无量纲参数 f_w , a , Pr , R , Bi , Br 对流体边界层内温度分布的影响类似; 当无量纲参数 f_w , a , Pr , R , Bi , Br 相同时, 有滑移比无滑移边界条件下的 $\theta(\eta)$ 更小, 温度边界层更薄.

2.3 表面摩擦因数 $f''(0)$ 和 Nu

图11~图12为变黏度参数 a 和喷注与吸入参数 f_w 对表面摩擦因数 $f''(0)$ 和 $-\theta'(0)$ ($-\theta'(0) = Nu \cdot Re^{-\frac{1}{2}}$, Nu 为局部努塞尔数) 的影响曲线. 图11为有、无滑移边界条件下 $Pr = 0.72$, $Br = 0.1$, $Bi = 0.1$, $f_w = 0.5$, $R = 0.1$ 时, a 对 $f''(\eta)$ 和 $-\theta'(0)$ 的影响. 图12为有、无滑移

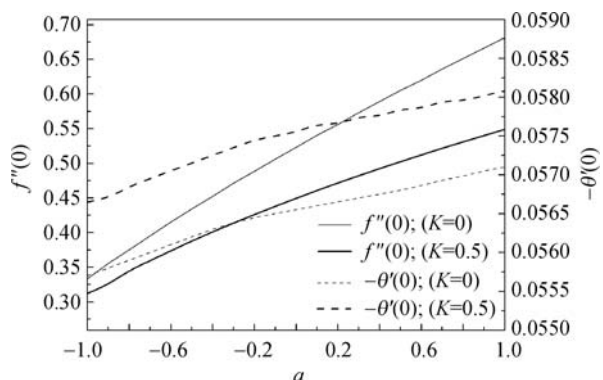


图11 有无滑移边界条件下 a 对 $f''(0)$ 及 $-\theta'(0)$ 的影响
Fig. 11 Effects of a on $f''(0)$ and $-\theta'(0)$ under slip and no-slip boundary conditions

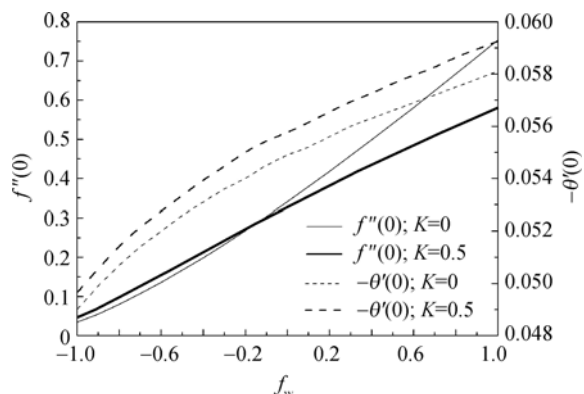


图12 有无滑移边界条件下 f_w 对 $f''(0)$ 及 $-\theta'(0)$ 的影响

Fig. 12 Effects of f_w on $f''(0)$ and $-\theta'(0)$ under slip and no-slip boundary conditions

边界条件下 $Pr=0.72$, $Br=0.1$, $Bi=0.1$, $a=0.1$ 和 $R=0.1$ 时, f_w 对 $f''(\eta)$ 和 $-\theta'(0)$ 的影响. 从图中可以看出, $f''(0)$ 和局部努塞尔数随 a , f_w 的增加而增加. 由图 11 可知, 有滑移相对于无滑移边界条件表面摩擦因数 $f''(0)$ 较小, 局部努塞尔数较大, 换热能力增强. 由图 12 可知, 有滑移相对于无滑移边界条件表面摩擦因数 $f''(0)$ 在壁面吸入时差距较小, 在喷注时差别较大; 有滑移相对于无滑移边界条件, 局部努塞尔数较大, 换热能力增强.

3 结 论

本文用相似变换及 Runge-Kutta 法研究了考虑辐射传热、流体黏度随温度变化、壁面存在喷注和吸入以及壁面为滑移边界条件时的竖直平板上层流边界层的无量纲速度及无量纲温度分布. 得出如下结论: ①随着 a , f_w 的增加, 速度边界层、温度边界层变薄; Br 的增大使速度边界层变薄, 温度边界层变厚. ② Pr 或 R 的增加, 使温度边界层变薄, Bi 增大使温度边界层变厚. ③与无滑移边界条件相比较, 滑移边界条件下的速度和温度边界层减薄, 表面摩擦因数 $f''(0)$ 较小, 局部努塞尔数较大, 换热能力增强. ④随着变黏度参数 a 的增大或喷注与吸入参数 f_w 的增大, 局部表面摩擦因数增大, 局部努塞尔数增大, 换热能力增大.

参考文献:

- [1] Weyl H. On the differential equations of the simplest boundary-layer problems [J]. Annals of Mathematics, 1942, 43(2): 381-407.
- [2] 吴承伟, 马国军, 周平. 流体流动的边界滑移问题研究进展 [J]. 力学进展, 2008, 38(3): 265-282.
- [3] WU Chengwei, MA Guojun, ZHOU Ping. A review of the study on the boundary slip problems of fluid flow [J]. Mechanical Development, 2008, 38(3): 265-282. (in Chinese)
- [4] Wang C Y. Flow due to a stretching boundary with partial slip; an exact solution of the Navier-Stokes equations [J]. Chemical Engineering Science, 2002, 57(17): 3745-3747.
- [5] Aman F, Ishak A, Pop I. Mixed convection boundary layer flow near stagnation-point on vertical surface with slip [J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2011, 32(12): 1599-1606.
- [6] Singh R K, Singh A K. MHD free convective flow past a semi-infinite vertical permeable wall [J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2012, 33(9): 1129-1142.
- [7] Nadeem S, Faraz N. Thin film flow of a second grade fluid over a stretching/shrinking sheet with variable temperature-dependent viscosity [J]. Chinese Physics Letters, 2010, 27(3): 34704-34707.
- [8] Merkin J H, Pop I. The forced convection flow of a uniform stream over a flat surface [J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2011, 16(9): 3602-3609.
- [9] Hayat T, Iqbal Z, Mustafa M, et al. Momentum and heat transfer of an upper-convected Maxwell fluid over a moving surface with convective boundary conditions [J]. Nuclear Engineering and Design, 2012, 252(11): 242-247.
- [10] Mahmoud M A A, Waheed S E. Variable fluid properties and thermal radiation effects on flow and heat transfer in micropolar fluid film past moving permeable infinite flat plate with slip velocity [J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2012, 33(5): 663-678.
- [11] Aziz A. A similarity solution for laminar thermal boundary layer over a flat plate with a convective surface boundary condition [J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2009, 14(4): 1064-1068.
- [12] Ishak A, Yacob N A, Bachok N. Radiation effects on the thermal boundary layer flow over a moving plate with convective boundary condition [J]. Meccanica, 2011, 46(4): 795-801.
- [13] Bataller R C. Radiation effects for the Blasius and Sakiadis flows with a convective surface boundary condition [J]. Applied Mathematics and Computation, 2008, 206(2): 832-840.
- [14] Mahmoud M A A, Megahed A M. MHD flow and heat transfer in a non-Newtonian liquid film over an unsteady stretching sheet with variable fluid properties [J]. Canadian Journal of Physics, 2009, 87(10): 1065-1071.
- [15] Subhashini S V, Samuel N, Pop I. Double-diffusive convection from a permeable vertical surface under convective boundary condition [J]. International Communications in Heat and Mass Transfer, 2011, 38(9): 1183-1188.
- [16] Bhattacharyya K. Mass transfer on a continuous flat plate moving in parallel or reversely to a free stream in the presence of a chemical reaction [J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2012, 55(13): 3482-3487.
- [17] Bataller R C. Similarity solutions for flow and heat transfer

- of a quiescent fluid over a nonlinearly stretching surface [J]. *Journal of Materials Processing Technology*, 2008, 203(1): 176-183.
- [17] Ishak A. Similarity solutions for flow and heat transfer over a permeable surface with convective boundary condition [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2010, 217(2): 837-842.
- [18] Soundalgekar V, Takhar H, Das U, et al. Effect of variable viscosity on boundary layer flow along a continuously moving plate with variable surface temperature [J]. *Heat and Mass Transfer*, 2004, 40(5): 421-424.
- [19] Michael J M, Iain D B. Momentum and heat transfer in a laminar boundary layer with slip flow [J]. *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, 2006, 20(4): 710-719.
- [20] Makinde O D. Second law analysis for variable viscosity hydromagnetic boundary layer flow with thermal radiation and Newtonian heating [J]. *Entropy*, 2011, 13(8): 1446-1464.
- [21] Makinde O D. Effect of variable viscosity on thermal boundary layer over a permeable flat plate with radiation and a convective surface boundary condition [J]. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 2012, 26(5): 1615-1622.
- [22] Butt A S, Munawar S, Ali A, et al. Entropy generation in hydrodynamic slip flow over a vertical plate with convective boundary [J]. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 2012, 26(9): 2977-2984.
- [23] Butt A S, Ali A. Entropy analysis of flow and heat transfer caused by a moving plate with thermal radiation [J]. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 2014, 28(1): 343-348.
- [24] Aziz A. Hydrodynamic and thermal slip flow boundary layers over a flat plate with constant heat flux boundary condition [J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2010, 15(3): 573-580.
- [25] Battaller R C. Radiation effects in the Blasius flow [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2008, 198(1): 333-338.
- [26] Lai F C, Kulacki F A. The effect of variable viscosity on convective heat transfer along a vertical surface in a saturated porous medium [J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 1990, 33(5): 1028-1031.
- [27] Sparrow E M, Cess R D. Radiation heat transfer: series in thermal and fluids engineering [M]. New York: McGraw-Hill, 1978.
- [28] Alama M, Rahman M, Sattar M. Effects of variable suction and thermophoresis on steady MHD combined free-forced convective heat and mass transfer flow over a semi-infinite permeable inclined plate in the presence of thermal radiation [J]. *International Journal of Thermal Sciences*, 2008, 47(6): 758-765.
- [29] Tsou F K, Sparrow E M, Goldstein R J. Flow and heat transfer in the boundary layer on a continuous moving surface [J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 1967, 10(2): 219-235.